符号(2,2)のユニタリ群のL関数について(Automorphic representationの研究)

AUTHOR(S):
菅野, 孝史

数理解析研究所講究録
583巻 1986年 12-37

符号(2,2)のユニタリ群のL関数について

東大・理(学振)　菅野 孝史
(Sugano Takashi)

符号(2,2)の direct similitude unitary group 上の正則尖点形式に付随するL関数について、その解析接続・関数等式を示す。最近、Piatetski-Shapiro, Rallis [14] において、古典群上の保型形式のL関数を調べるかなり一般的な方法が見い出された。それをこの場合に適用し、詳しく計算することによっても得られると思われる。しかしここでは、Hecke [5], Andrianov [1] で行われた Fourier係数から作られる Dirichlet 級数を調べる手法の一般化である [21], [22] を用いて証明する。

§1. 設定・主結果

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ を判別式 d_K の虚2次体、$\mathfrak{o}_K, \delta_K$ をそれぞれKの整数環, 共役差積 ideal とする。$\mathbb{Q}$上の代数群Gを

$$G_{\mathbb{Q}}=\left\{ g\in GL_4(K) \;\middle|\; {}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ -1_2 & 0\end{pmatrix}g=\mu(g)\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ -1_2 & 0\end{pmatrix},\ \det g=\mu(g)^2 \right\}$$

で定義する。これは例えば Shimura [17] で、*direct similitude unitary group* とよばれているものである。$G^{(1)}$ により $\mu(g)=1$ で定義される部分代数群をあらわす。素数 p に対し、$U_p = G_p \cap GL_4(\mathcal{O}_{K,p})$ $(\mathcal{O}_{K,p}=\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{Z}_p)$, $U_{A,f}=\prod_{p<\infty}U_p$ とおく。

G の実点の単位元成分 G_∞^+ は、$\mathrm{I}_{2,2}$ 型領域 $\mathcal{D}=\{Z\in M_2(\mathbb{C}) \mid (2i)^{-1}(Z-{}^t\bar{Z})>0\}$ に一次分数変換 $g\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ $\left(g=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in G_\infty^+,\ Z\in\mathcal{D}\right)$ で作用する。$J_1(g,Z)=CZ+D$, $J_2(g,Z)=\bar{C}\,{}^tZ+\bar{D}$ は、ともに $G_\infty^+\times\mathcal{D}$ 上の正則保型因子であり、$g\in G_\infty^+$ ゆえ $\det J_1(g,Z)=\det J_2(g,Z)$ が成立する。([19] (1·19))。$Z_0=i1_2$ の $G_\infty^{(1)}$ における固定化群を U_∞ と書く $(\cong S(U(2)\times U(2)))$。

$\boldsymbol{l}=(l_1,l_2)$, $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2)\in\mathbb{Z}^2$ $(d_1,d_2\geqslant 0)$ に対し, $GL_2(\mathbb{C})\times GL_2(\mathbb{C})$ の既約表現 $\rho=\rho_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{d}}$ を

$$\rho_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{d}}(g_1,g_2)=(\det g_1)^{l_1}\sigma_{d_1}(g_1)\otimes(\det g_2)^{l_2}\sigma_{d_2}(g_2)$$

で定義し、表現空間を $V=V_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{d}}$ と書く。ここで σ_d は $GL_2(\mathbb{C})$ の d 次対称テンソル表現。ρ は $u\in U_\infty$ に対し, $\rho(u)=\rho(J_1(u,Z_0),J_2(u,Z_0))$ によって U_∞ の既約表現を定めるが、V の内積 $\langle\ ,\ \rangle_V$ をこれが *unitary* となるよう選んでおく。

このノートで扱う *cusp form* を定義しよう。

$$S(\rho_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{d}},U_{A,f}) \underset{\mathrm{def}}{=} \{F: G_A\longrightarrow V \mid \text{i)} \sim \text{iii)}\}$$

$$\begin{cases} \text{i)} \quad F(\gamma x g u_\infty u_f) = \rho(u_\infty)^{-1} F(g) \qquad \forall \gamma \in G_{\mathbb{Q}},\ \forall x \in \mathbb{Q}_A^\times, \\ \qquad\qquad\qquad \forall (u_\infty, u_f) \in U_\infty \times U_{A,f}, \\ \text{ii)} \quad Z = g_\infty\langle Z_0 \rangle \in \mathfrak{D},\ g_f \in G_{A,f} \text{ のとき、} \\ \quad \mu(g_\infty)^{-(l_1+l_2+(d_1+d_2)/2)} \rho(J_1(g_\infty, Z_0), J_2(g_\infty, Z_0))\, F(g_\infty g_f) \\ \quad \text{は、} Z \text{ と } g_f \text{ にのみに依存し } Z \text{ の関数としては正則,} \\ \text{iii)} \quad \text{cuspidal ; すなわち、} G \text{ の任意の proper parabolic} \\ \quad \text{subgroup の unipotent radical } N \text{ に対し、} \\ \qquad \int_{N_{\mathbb{Q}} \backslash N_A} F(ng)\, dn = 0 \qquad \forall g \in G_A . \end{cases}$$

この定義より、$d_1+d_2 = \text{odd}$ ならば $S(\rho; U_{A,f}) = \{0\}$ となる。従って以下 $d_1+d_2=\text{even}$ としてよい。また l については l_1+l_2 のみに依存する。

G_p と U_p の組で決まる Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ が、右から convolution で $S(\rho; U_{A,f})$ に作用している。この作用は（Petersson 内積に関して）可換正規で、$S(\rho; U_{A,f})$ は $\mathcal{H}_{A,f} = \bigotimes_{p<\infty} \mathcal{H}_p$（制限テンソル積）の同時固有関数からなる基底をもつ。そこで、F が同時固有関数 : $F * \phi = \lambda_F(\phi) F$ for $\forall \phi \in \mathcal{H}_{A,f}$, とし、$F$ の L 関数 $L(F; s)$ を

$$L(F; s) = \prod_{p<\infty} L_p(F; s) \qquad \text{と定義する。}$$

但し, $L_p(F; s) = (1-p^{-2s})^{-1}(1-p^{-2s-2})^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_F(T(p^l))\, p^{-(s+2)l}$

$$T(p^l) = \{ g \in G_p \cap M_4(O_{K,p}) \mid \mu(g) \in p^l \mathbb{Z}_p^\times \} \in \mathcal{H}_p .$$

(これは、$p \nmid d_K$ なら6次の、$p \mid d_K$ なら5次の Euler 積である) このL関数について、次の結果を得る。

<u>Theorem</u> $F \in S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})$ が $\mathcal{H}_{A,f}$ の同時固有関数であるとする。このとき、

$$\xi(F;s) = |d_K|^{\frac{s}{2}} (2\pi)^{-3s}\, \Gamma\left(s+\ell_1+\ell_2+\frac{d_1+d_2}{2}-2\right) \Gamma\left(s+1+\frac{d_1+d_2}{2}\right)$$
$$\times \Gamma\left(s+\frac{|d_1-d_2|}{2}\right) L(F;s)$$

は、高々 $s=-1,0,1,2$ に *simple pole* をもつ他は正則な関数として、全s平面に解析接続され、関数等式

$$\xi(F;s) = \xi(F;1-s) \qquad \text{をみたす。}$$

また、$d_1 \neq d_2$ ならば *entire* であり、$s=-1,2$ で pole をもつ可能性は $d_1=d_2=0$ の場合にのみ生ずる。

<u>Remark</u> このL関数は、G のL群 ${}^L G_{K/\mathbb{Q}} \simeq GO(6;\mathbb{C})$ の *natural representation* に対応するものである。

この Theorem は §6 で証明される。§2 − §5 はそのための準備。§7, §8 では、[23] で考えた Maass space に関係することにふれる。

§2. 四元数環

$\mathbb{Q}$ 上の4次元 vector space $\mathcal{V} = \{X \in M_2(K) \mid {}^t\overline{X} = X\}$ を考え、$\mathcal{V}$上の内積として $\mathrm{tr}(XY)$ $(X, Y \in \mathcal{V})$ をとる。$\mathcal{V}$ の lattice $\mathcal{L} = M_2(\mathcal{O}_K) \cap \mathcal{V}$ の *dual lattice* を $\mathcal{L}^*$

と書く。すなわち、

$$\mathcal{L}^* = \left\{ S = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \delta_K^{-1} \right\} .$$

$S \in \mathfrak{V}$, $\det S \neq 0$ のとき、$B(S)$ で cyclic algebra (K, ω_S), $\omega_S^2 = -\det S$ をあらわす。これは四元数環で、その判別式（分岐する素数の積）を $d(S)$ と書く。

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $G^\star$ を、$G^\star_{\mathbb{Q}} = \{ g \in GL_2(K) \mid \det g \in \mathbb{Q}^\times \}$ で定義し、これを $g \longmapsto \tilde{g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \cdot {}^t\bar{g}^{-1} \end{pmatrix}$ によって、しばしば G の部分代数群ともみる。さて，$S \in \mathfrak{V}$, $\det S \neq 0$ のとき、S の direct similitude unitary 群 $H(S)_{\mathbb{Q}} = \{ g \in G^\star_{\mathbb{Q}} \mid {}^t\bar{g} S g = (\det g) S \}$ は、$B(S)^\times_{\mathbb{Q}}$ に同型であることは、良く知られている（e.g. [17]）。

$\mathfrak{V}^+_{\mathbb{Q}} = \{ S \in \mathfrak{V}_{\mathbb{Q}} \quad \det S > 0 \}$ に同値関係 $\sim$:

$$S \sim S' \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists l \in \mathbb{Q}^\times,\ {}^\exists \gamma \in G^\star_{\mathbb{Q}} \quad \text{s.t.} \quad S' = l \cdot (\det \gamma)^{-1} \cdot {}^t\bar{\gamma} S \gamma ,$$

を入れる。

<u>Lemma 1</u>　$\mathfrak{V}^+_{\mathbb{Q}} / \sim$ の代表元 S として、次の形のものをとることが出来る。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^* , \quad |d_K| \det S = \prod_{p < \infty} p^{\nu_p} d(S) , \quad 0 \leq \nu_p \leq 1 .$$

この Lemma の形の S を、reduced と呼ぶことにする。後に利用するために、$B(S)$ の $M_2(K)$ への imbedding をひとつ次のように決めておく。$S = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = b + \omega_S$ とし，$\psi_S(\omega_1 u + \omega_2 v) = \begin{pmatrix} u & -c\bar{v} + b(u - \bar{u}) \\ v & \bar{u} + \mathrm{tr}(bv) \end{pmatrix}$ とおく。

この写像により、同型 $B(S)^\times \simeq H(S)$ が得られる。ω_1, ω_2 を basis とする右 $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{O}(S) = \omega_1\mathcal{O}_K + \omega_2\mathcal{O}_K$ は $B(S)$ の order となるが、容易にわかるように

$\mathcal{O}(S)_p$ が $B(S)_p$ の maximal order $\Longleftrightarrow$ $\nu_p = 0$ 。

以下、reduced な S をひとつ固定し、しばしば S を略す。

Lemma 2　次の coset 分解が成立する。

$$G_p^\star = \coprod_{m\geq 0} H_p \begin{pmatrix} 1 & \\ & p^m \end{pmatrix} U_p^\star \left(\coprod H_p \begin{pmatrix} \pi_p & \\ & p\pi_p^{-1} \end{pmatrix} U_p^\star \right)$$

(disjoint)，ここで $U_p^\star = G_p^\star \cap GL_4(\mathcal{O}_{K,p})$ で、右辺のカッコは $p | d_K$ かつ $p \nmid d(S)$ かつ $\nu_p = 0$ のときのみあらわれる（π_p は K_p の素元）。

$m \geq 0$ のとき、$\mathcal{O}_p$ の sub-order $\mathcal{O}_{m,p}$ を $\omega_1\mathcal{O}_{K,p} + \omega_2 p^m \mathcal{O}_{K,p}$ で定義。$\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^{-m} \end{pmatrix} \psi_S(\mathcal{O}_{m,p}^\times) \begin{pmatrix} 1 & \\ & p^m \end{pmatrix} \subset GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$ である。

§3. Eisenstein series のための準備

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G' を、

$$G'_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_2(B) \quad g^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times \right\}$$

で定義する。ここで $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対し $g^* = \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\gamma \\ \bar\beta & \bar\delta \end{pmatrix}$（$^-$ は B の main involution）。定理は、この群上の Eisenstein series の性質に帰着して証明されるので、この群について少し調べておく。

次の埋め込みにより、G' を G の部分代数群とみる。

$$\Psi_S : G' \hookrightarrow G$$
$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1 & \\ & h_S^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_S(\alpha) & \psi_S(\beta)\\ \psi_S(\gamma) & \psi_S(\delta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & h_S\end{pmatrix},$$

ここで、$h_S = \begin{pmatrix} c & -b \\ -\bar{b} & 1\end{pmatrix}\sqrt{d_K} \in GL_2(K)$。各 p に対し、$\mu_p \geq 0$ を殆んど全ての p で $\mu_p = 0$ となるように選び $\mu = (\mu_p)$ と書く。$M_{\mu_p, p} = \begin{pmatrix}1 & \\ & p^{\mu_p}\end{pmatrix}$，$U'_{\mu_p, p} = \{ g \in G'_p \mid \widetilde{M}_{\mu_p, p}^{-1} \Psi_S(g) \widetilde{M}_{\mu_p, p} \in U_p \}$ とする。これは、$\{ g \in G'_p \mid \nu(g) \in \mathbb{Z}_p^{\times},\ g \in \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{\mu_p, p} & \mathcal{O}_{\mu_p, p}\alpha_S^{-1} \\ \alpha_S \mathcal{O}_{\mu_p, p} & \mathcal{O}_{\mu_p, p}\end{pmatrix} \}$ と書かれる（$\alpha_S = \omega_S \sqrt{d_K}$）。簡単のため、$U'_{\mu, A, f} = \prod_{p < \infty} U'_{\mu_p, p}$ とおく。

$\mathfrak{D}' = \{ z \in B_\infty \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ に、G'_∞ の単位元成分が、（一次分数変換で）作用している。$G'^{(1)}_\infty = \{ g \in G'_\infty \mid \nu(g) = 1 \}$ における $z_0 = N(\alpha_S)^{-1/2}$ の固定化群を U'_∞ であらわす。すなわち、$U'_\infty = \{ \begin{pmatrix} a & b z_0 \\ z_0^{-1} b & a \end{pmatrix} \mid a\bar{a} + b\bar{b} = 1,\ \bar{a}b + \bar{b}a = 0 \} \cong SU(2)^2$。$M_\infty = \sqrt{\begin{pmatrix} c & -b \\ -\bar{b} & 1 \end{pmatrix}}\ N(\omega_S)^{-1/4}$ とおくと、

$\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(U'_\infty) \widetilde{M}_\infty \subset U_\infty$ であり、$u_\infty = \begin{pmatrix} a & b z_0 \\ z_0^{-1} b & a \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{cases} J_1(\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(u_\infty) \widetilde{M}_\infty, z_0) = M_\infty^{-1} \psi_S(a+b) M_\infty, \\ J_2(\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(u_\infty) \widetilde{M}_\infty, z_0) = \overline{M}_\infty^{-1} \psi_S(a-b) \overline{M}_\infty, \end{cases}$$

が成立する。ゆえに、ρ は $U'_\infty = SU(2) \times SU(2)$ の表現 $\sigma_{d_1} \otimes \sigma_{d_2}$ をみちびく。これを ρ'_S であらわそう。$B^{(1)}_\infty = \{ b \in B^\times_\infty \mid N(b) = 1 \} \cong SU(2)$ への制限

$\rho'_S(b) = \rho'_S\left(\begin{pmatrix} b & \\ & b \end{pmatrix}\right) = \rho\begin{pmatrix} \psi_S(b) & \\ & {}^t\overline{\psi_S(b)}^{-1} \end{pmatrix}$ により、

$B^{(1)}_\infty$ の表現が得られるが、Clebsch-Gordan のよく知られた定理

から、 $\rho_S'|B_\infty^{(1)} \cong \bigoplus_{\nu=0}^{\mathrm{Min}(d_1,d_2)} \sigma_{d_1+d_2-2\nu}$ である。

<u>Lemma 3</u> 岩沢分解 $G_A' = P_A' U_{0,A}'$ が成立する。

ここで、 $U_{0,A}' = U_\infty' \times U_{0,A,f}'$, $P' = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G' \right\}$ 。

<u>Remark</u> $\nu_p = 0$ なる p についての $G_p' = P_p' U_{0,p}'$ の成立は、$U_{0,p}'$ が maximal lattice を stable にする subgroup であることから良く知られている（cf. Satake [15]）。$\nu_p = 1$, $p \nmid d(S)$ のときは、$G_p' \cong GS_p(2, \mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{O}_{0,p} \cong \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \end{pmatrix} \middle| * \in \mathbb{Z}_p \right\}$ であり、$U_{0,p}'$ は $GS_p(2, \mathbb{Z}_p)$ と共役でない maximal compact subgroup となる。$p | d(S)$, $\nu_p = 1$, $p | d_K$ のときは、（そしてこのときに限り）$U_{0,p}'$ は maximal ではなくなる。

次節で用いられる Eisenstein series は、$P_A' U_{\mu,A}'$ 上に support をもつ G_A' 上の関数を使って定義される。$P_A' U_{\mu,A}'$ を特徴付けておく（ $U_{\mu,A}' = U_\infty' \times U_{\mu,A,f}'$ ）。

$$g = \begin{pmatrix} x_1 + \omega_S x_2 & (y_1 + \omega_S y_2)\alpha_S^{-1} \\ \overline{\alpha_S}(z_1 + \omega_S z_2) & w_1 + \omega_S w_2 \end{pmatrix} \in G_p'$$ に対し、

$n(g) = z_2 \overline{w_1} + z_1 \overline{w_2}$ とおく （ $n(g) \in \mathbb{Q}_p$ ）。

<u>Lemma 4</u> $g \in U_{0,p}'$ のとき、

$$g \in P_p' U_{\mu_p,p}' \iff n(g) \in p^{\mu_p} \mathbb{Z}_p \quad .$$

<u>§4. Eisenstein series</u>

$\rho_S'|B_\infty^{(1)}$ の既約成分をひとつとり (σ_d, V_d) とする。（ $d = d_1 + d_2 - 2\nu$, $V_d \subset V$ とみる）。$B_A^\times$ 上の保型形式の空間を、

$$S(\sigma_d\,;\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f}) \underset{\mathrm{def}}{=} \{ f : B^{\times}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^{\times}_{A}\backslash B^{\times}_{A}/\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f} \longrightarrow V_d \mid f(b u_\infty) = \sigma_d(u_\infty)^{-1} f(b) \}$$

と定義する。$d=odd$ なら空間は潰れるから、以下 $d=even$ を仮定する。 B_A上の $End(V_d)$ に値をとる Schwartz-Bruhat 関数 $\varphi=\prod_v \varphi_v$ を次のようにえらぶ。

$$\begin{cases} \varphi_\infty(x) = \sigma_d(\bar{x})\,\mathbf{e}[iN(x)] & (\sigma_d(r u_\infty) = r^d \sigma_d(u_\infty),\ r\in\mathbb{R},\ u_\infty \in B^{(1)}_\infty), \\ \varphi_p = \mathcal{O}_{\mu_p,p} \text{ の特性関数}. \end{cases}$$

$f\in S(\sigma_d\,;\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f})$ の zeta関数を、

$$(Z_\varphi(s)f)(h) = \int_{B^{\times}_{A}} |N(\beta)|_A^{s+\frac{1}{2}}\, \varphi(\beta) f(h\beta^{-1})\, d^{\times}\beta$$

で定義。 $f'(h) = f(h\,\alpha_{s,f}^{-1})$ （$\alpha_{s,f}$ は α_s の finite part）とおく。

<u>Proposition</u> （Jacquet-Langlands [6] §14） $Z_\varphi(s)f$ は、全 s平面に高々 $s=-1/2,\ 3/2$ で simple pole をもつ他は正則な関数として解析接続され、関数等式

$$Z_\varphi(s)f = (-1)^{d/2}\, c_0^{-s+1/2}\, Z_\varphi(1-s) f'$$

をみたす。ここで、$c_0 = |d_k \det S| \prod_{p<\infty} p^{2\mu_p}$。 また、$d>0$ 或いは $d=0$ で f が定数関数と直交するならば、entire。

ρ_S を、$\sigma_{d_1}\otimes\sigma_{d_2}$ と同一視し、$B_A\oplus B_A$ 上の関数 $\Phi(x,y) = \Phi_\infty(x,y)\cdot\prod_{p<\infty}\Phi_p(x,y)$ を次のように定義しよう。

$$\begin{cases} \Phi_\infty(x,y) = \sigma_{d_1}(\overline{y+xz_0})\otimes\sigma_{d_2}(\overline{y-xz_0})\,\mathbf{e}[i(N(y)+N(xz_0))], \\ \Phi_p = \alpha_S\,\mathcal{O}_{\mu_p,p}\oplus\mathcal{O}_{\mu_p,p} \text{ の特性関数}. \end{cases}$$

$S(\sigma_d\,;\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f})$ の元 f で、$\mu_p\geq 1$ なるすべての p に対し、$f*\mathcal{O}^{\times}_{\mu_p-1,p}=0$ を満たすものの全体を、$S(\sigma_d\,;\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f})^{(0)}$

であらわす。$f \in S(\sigma_d; O^{\times}_{\mu,A,f})^{(0)}$, $g \in G'_A$ に対し、

$L^f_\Phi(g;s) = |\nu(g)|_A^{s+1/2} \int_{B^\times_A} |N(\beta)|_A^{s+\frac{1}{2}} \Phi(\beta(0,1)g) f(\beta^{-1}) d^\times\beta$ とおく。

<u>Lemma 5</u>

$$L^f_\Phi(g;s) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(s+\frac{d_1+d_2+1}{2})}{\Gamma(s+\frac{d_1+d_2-2\nu+1}{2})} \rho_S(u(g)_\infty)^{-1} |t(g)|_A^{s+\frac{1}{2}} Z_\varphi(s) f(\beta(g)) \\ \qquad\qquad \text{if } g = \begin{pmatrix} t(g)\beta(g) & * \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix} u(g), \quad u(g) \in U'_{\mu,A}, \\ 0 \qquad\qquad \text{if } g \notin P'_A U'_{\mu,A} \quad . \end{cases}$$

すなわち、$L^f_\Phi(\ ;s)$ の support は $P'_A U'_{\mu,A}$ に入る。そこで Eisenstein series $E^*(g,f;s)$ を、

$$E^*(g,f;s) = C_0^{\frac{s}{2}} \xi(2s+1) \frac{\Gamma(s+\frac{|d_1-d_2|+1}{2})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \sum_{\gamma \in P'_Q \backslash G'_Q} L^f_\Phi(\gamma g; s+1)$$

で定義する。($\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$)。

<u>Proposition 1</u> $E^*(g,f;s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され、関数等式 $E^*(g,f;s) = E^*(g,f;-s)$ をみたす。$s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ で高々 simple pole をもつ他では正則で, $\pm\frac{3}{2}$ での pole は $d_1 = d_2 = 0$ のときのみおこり得る。また、$d_1 \neq d_2$ ならば entire 。

証明は、Langlands による Eisenstein series の一般論に帰着される（cf. [10], [3], [4], [7] ）。しかし、上の具体的な関数等式を得るためには、かなりの計算を要する。たとえば、Weyl 群の元で"折り返した"とき、support が再び $P'_A U'_{\mu,A}$ に入ることなども、$f \in S(\sigma_d; O^{\times}_{\mu,A,f})^{(0)}$ でなければ言えない。

証明を簡単にスケッチしておこう。まず一般論より、$E^*(g,f;s)$ は全s平面に解析接続され、関数等式

$$E^*(g,f;s) = E(g,\Phi';-s)$$ が知られている。

ここで、

$$E(g,\Phi';s)=\sum_{\gamma\in P'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{Q}}} \Phi'(\gamma g)\,|t(\gamma g)|_A^{s+\frac{3}{2}} ,$$

$$\Phi'(g)\,|t(g)|_A^{-s+\frac{3}{2}} = c_0^{s/2}\,\zeta(2s+1)\,\frac{\Gamma\left(s+\frac{|d_1-d_2|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} \times \int_{N'_A} L^f_\Phi(w_s^{-1}ng\,;s+1)\,dn ,$$

$$N'=\left\{\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad w_s=\begin{pmatrix}0&\alpha_s^{-1}\\ \alpha_s&0\end{pmatrix},\quad vol(N'_{\mathbb{Q}}\backslash N'_A)=1 。$$

Φ'の定義にあらわれる積分

$$\int_{B_A^\times}|N(\beta)|_A^{s+3/2}\int_{B_A^-}\Phi\left(\beta(0,1)w_s^{-1}\begin{pmatrix}1&y\\&1\end{pmatrix}k_0\right) f(\alpha_s\beta_0\alpha_s^{-1}\beta^{-1})\,d^\times\beta\,dy$$

$(k_0\in U'_{0,A})$ を少し調べねばならない。$\beta\in B_p^\times$, $k_0\in U'_{0,p}$ のとき、$\psi(\beta;k_0)=\left\{y\in B_p^- \;\middle|\; \beta(0,1)w_s^{-1}\begin{pmatrix}1&y\\&1\end{pmatrix}k_0\in\alpha_s\mathcal{O}_{\mu_p,p}\oplus\mathcal{O}_{\mu_p,p}\right\}$ とおけば、上の積分の p-part は、

$$\int_{B_p^\times}|N(\beta)|_p^{s+\frac{3}{2}}\, vol\,\psi(\beta;k_0)\, f(\alpha_s\beta_0\alpha_s^{-1}\beta^{-1})\,d^\times\beta$$ である。

<u>Lemma 6</u>

(i) $\mu_p\geq1$ かつ $n(k_0)\notin p^{\mu_p}\mathbb{Z}_p$ のとき,

$$vol\,\psi(\varepsilon\beta;k_0)=vol\,\psi(\beta;k_0)\qquad \forall\varepsilon\in\mathcal{O}^\times_{\mu_p-1,p} .$$

(ii) $vol\,\psi(\beta;1)=|N(\beta)|_p^{-1}\,p^{-\mu_p+l(\beta)}\,\varphi_p(\beta)$, ここで $l(\beta)$ は、$p^{-l(\beta)}\beta$ が $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{O}_{\mu_p,p}$ の primitive element となるように選んでおく。

この Lemma は、$vol\,\psi(\beta;k_0)$ を explicit に求めることによ

って得られるが、より簡単な証明が望まれる。Lemma 6 (i) より、$f \in S(\sigma_d\,;\,\mathcal{O}^{\times}_{\mu,A,f})^{(0)}$ のとき、Φ' の suppot は $P'_A U'_{\mu,A}$ に入ることがわかる。(ii) を使って具体的に積分を計算すれば、

$$\Phi'\left(\begin{pmatrix}1 & x_0\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0\beta_0 & \\ & \beta_0\end{pmatrix}\right) = c_0^{-\frac{1}{2}}\,\zeta(2s)\,\frac{\Gamma\left(-s+\frac{|d_1-d_2|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-s+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(-s+\frac{d_1+d_2+3}{2}\right)}{\Gamma\left(-s+\frac{d_1+d_2-2\nu+3}{2}\right)}\,(Z_\varphi(s)f')(\beta_0,$$

を得る。$Z_\varphi(s)f$ の関数等式, Lemma 5 より、$E^*(g, f\,;\,s)$ の関数等式が証明される。pole の location 等については、その constant term を調べれば良い。

$$E^*_0(g, f\,;\,s) = \int_{N'_{\mathbb{Q}}\backslash N'_A} E^*\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}g, f\,;\,s\right)dx$$

$$= c_0^{\frac{s}{2}}\,\alpha(s)\,\zeta(2s+1)\,L^f_\Phi(g\,;\,s+1) + c_0^{-\frac{s}{2}}\,\alpha(-s)\,\zeta(-2s+1)\,L^f_\Phi(g\,;\,-s+1),$$

ここで、

$$\alpha(s) = \frac{\Gamma\left(s+\frac{|d_1-d_2|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \prod_{j=0}^{\frac{|d_1-d_2|}{2}-1}\left(s+\frac{1}{2}+j\right).$$

§5. (generalized) local Whittaker function

素数 p を固定。Satake [15] より $\mathcal{H}_p$ の構造は良くわかっている。[23] §3 で引用した形を復習しておく。

$$\mathcal{H}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[c_0, c_0^{-1}, c_1, c_2] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = -1 \text{ or } 0, \\ \quad \text{ここで, } c_0, c_1, c_2 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上代数的独立。} & \\ \mathbb{C}[c_0, c_0^{-1}, c_1, c_2, c_3, c_4] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 1, \\ \quad \text{ここで, } c_0, c_1, c_2, c_3 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上代数的独立で、} & \\ \quad \{c_2+(p+1)(p^2+1)c_0\}^2 = c_0\{c_3c_4+(p+1)c_1(c_3+c_4) & \\ \qquad\qquad +(p+1)^2c_1^2\}, & \end{cases}$$

但し、$C_0 = \begin{cases} U_p\, diag(p,p,p,p)\, U_p & \text{if } p \nmid d_K, \\ U_p\, diag(\pi, p\pi^{-1}, p\bar{\pi}^{-1}, \bar{\pi})\, U_p & \text{if } p \mid d_K, \end{cases}$

$C_1 = U_p\, diag(p,p,1,1)\, U_p$, $C_2 = U_p\, diag(p^2,p,1,p)\, U_p$, また $K_p = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$ のとき、$\pi = (p,1)$ とし $C_3 = U_p\, diag(p\pi, \bar{\pi}, \bar{\pi}^{-1}, \bar{\pi})\, U_p$, $C_4 = \bar{C}_3$ とおいた。

$\mathcal{H}_p$ 係数の多項式 $P_p(T)$ を、

$$P_p(T) = \begin{cases} \{1 - C_1 p^{-2} T + (C_2 + (p^3+p^2-p+1)C_0)\, p^{-3} T^2 - C_0 C_1 p^{-2} T^3 + C_0^2 T^4\} \\ \quad \times (1 - C_0 T^2) & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = -1, \\ \{1 - C_1 p^{-2} T + (C_2 + (p^2+p+1)C_0)\, p^{-3} T^2 - C_0 (C_3 + C_4 + 2C_1)\, p^{-3} T^3 \\ \quad + C_0 (C_2 + (p^2+p+1) C_0)\, p^{-3} T^4 - C_1 C_0^2 p^{-2} T^5 + C_0^3 T^6\} & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 1, \\ \{1 - (C_1 - (p^2-1)C_0)\, p^{-2} T + (C_2 - (p-1) C_0 C_1 + (p^3+p^2-p+1) C_0^2)\, p^{-3} T^2 \\ \quad - (C_1 - (p^2-1) C_0)\, C_0^2 p^{-2} T^3 + C_0^4 T^4\}(1 - C_0 T) & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 0, \end{cases}$$

で定義する．$\mathcal{H}_p$ の 1 次表現 λ に対し、*local* L function を

$$L_p(\lambda; s) = \{\lambda(P_p(T)) \mid T = p^{-s}\}^{-1}$$ で導入しておく。

<u>Remark</u> G は $\mathbb{Q}$ 上の quasi-split 群で、K で split する。[9] で導入された L 群は、今の場合

$${}^L G_{K/\mathbb{Q}} = {}^L G^0 \rtimes Gal(K/\mathbb{Q}) \cong GO(6;\mathbb{C}) = \{g \in GL_6(\mathbb{C}) \mid {}^t g g \in \mathbb{C}^\times\}.$$

上の local factor は、($p \nmid d_K$ のところでは) この *natural representation* ${}^L G_{K/\mathbb{Q}} \hookrightarrow GL_6(\mathbb{C})$ に対応している。

(*generalized*) local Whittaker function と言うべきものを考えよう。$\mu = \mu_p \geq 0$ をとり、

$$\mathcal{W}_\mu = \left\{ W : \widetilde{\mathcal{O}}^\times_{\mu,p} \backslash G_p / U_p \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; W\left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} g\right) = \chi(\mathrm{tr}\, SX)\, W(g) \quad \forall X \in \mathcal{V}_p \right\}$$

とおく。ここで χ は $\mathbb{Q}_p$ の conductor $\mathbb{Z}_p$ の character. この空間には右から $\mathcal{H}_p$ が、左から $\mathcal{H}'_p = \mathcal{H}(B_p^\times, \mathcal{O}_{\mu,p}^\times)$ が convolution で作用している。$W \in \mathcal{W}_\mu$, $m \geq 0$, $\ell \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$W_{m,\ell}(h) = W\left(\begin{pmatrix} p^{m+\ell} & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{h\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^m \end{pmatrix}}\right) \qquad (h \in B_p^\times) \quad \text{とおく。}$$

以下 $W \in \mathcal{W}_\mu$ について、次の状況を考える。

$$(*)\begin{cases} W * \phi = \lambda(\phi) W \quad \text{for } {}^\forall \phi \in \mathcal{H}_p, \quad W_{m,\ell} = 0 \quad \text{for } 0 \leq m \leq \mu - 1, \\ W_{\mu,\ell}(1) \neq 0 \quad \text{for some } \ell, \quad (\mathcal{O}_{\mu-1,p}^\times) * W = \sigma_p W \quad \text{if } \mu \geq 1. \end{cases}$$

<u>Remark</u>　$p | d_K$ のときのみあらわれる Lemma 2 での例外 case についても、$(W * c_0)_{0,\ell}(h) = W\left(\begin{pmatrix} p^\ell & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{h\begin{pmatrix} \pi & \\ & p\pi^{-1} \end{pmatrix}}\right)$ であることに注意すれば、全ての場合について、W は $W_{m,\ell}$ 達で完全に定まる。また、定義より $\ell < 0 \Rightarrow W_{m,\ell} = 0$ 。

<u>Proposition 2</u>　$(*)$ の状況下で、次の等式が成立。

(i)　$\sigma_p = 0 \quad \text{if } \mu \geq 1$,

(ii)
$$\int_{B_p^\times} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} W\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{h\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^\mu \end{pmatrix}}\right) |t|_p^{s-2} \varphi_p(h) |N(h)|_p^{s+1} d^\times h \, d^\times t$$
$$= p^{-\mu(s-2)} (1 - p^{-2s}) L_p(\lambda; s) W\left(\begin{pmatrix} p^\mu & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^\mu \end{pmatrix}}\right) \qquad ,$$

ここで、φ_p は §4 同様 $\mathcal{O}_{\mu,p}$ の特性関数。また Haar meas. はそれぞれ $vol(\mathcal{O}_{\mu,p}^\times) = 1$, $vol(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$ と正規化しておく。

証明はまず、$\mathcal{H}_p$ の W への作用を $W_{m,\ell}$ の言葉で書き、漸化式を作る。これを見れば、(i) がわかる。$\left\{\sum_{\ell=0}^\infty W_{\mu,\ell}(h) p^{(2-s)\ell}\right\} \times P_p(p^{-s})$ を、p^{-s} の多項式として具体的に求める。$\mathcal{H}'$ の構造, (i), 条件 $(*)$ を使い $B_p^\times$ 上の積分が計算される。

§6. 定理の証明

$S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})$ の元 $F\,(\neq 0)$ を、$\mathcal{H}_{A,f}$ 同時固有関数とする。F の Fourier 係数を

$$F_S(g)=\int_{\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}\backslash\mathcal{V}_A}F\left(\begin{pmatrix}1&X\\&1\end{pmatrix}g\right)\chi(-\mathrm{tr}\,SX)\,dX$$ で定義する。

ここで、$S\in\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$, $g\in G_A$, $\chi=\prod_v\chi_v\in(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}_A)^{\wedge}$, $\chi_\infty(x)=\mathbf{e}[x]$。正則性より $S\notin\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^{+}\Rightarrow F_S=0$ である。従って、Lemma 1 より G_A 上の関数として $F_S\neq 0$ なる、reduced な S が存在する。この S を今後固定しておく。G_A の岩沢分解より、$\mathbb{Q}_A^{\times}$ の元 t と G_A^{*} の元 $\hat{g}$ が存在し、$F_S\left(\begin{pmatrix}t&\\&1\end{pmatrix}\hat{g}\right)\neq 0$ をみたす。Lemma 2 から各 p に対し $m_p\geqq 0$ (殆んどすべての p で $m_p=0$) と、$t\in\mathbb{Q}_A^{\times}$ が存在して、H_A 上の関数として $F_S\left(\begin{pmatrix}t&\\&1\end{pmatrix}\widehat{h\begin{pmatrix}1&\\&p^{m_p}\end{pmatrix}}\right)\neq 0$ (前節の Remark も参照)。このような (m_p) のうち、極小なものをひとつとり、$\mu=(\mu_p)$ と書くことにする。$M_{\mu_p,p}=\begin{pmatrix}1&\\&p^{\mu_p}\end{pmatrix}$, M_∞ を §3 で定められたものとし、$M_{\mu,A}=M_\infty M_{\mu,A,f}$, $M_{\mu,A,f}=\prod_{p<\infty}M_{\mu_p,p}$ と略記する。$F_S\left(\begin{pmatrix}t&\\&1\end{pmatrix}\widehat{hM_{\mu,A}}\right)$ は H_A 上の関数として、左 $H_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_A^{\times}$, 右 $\mathcal{O}_{\mu,A,f}^{\times}$ 不変で、$H_\infty^{(1)}=B_\infty^{(1)}$ の右からの作用で表現 ρ_S' があらわれる。この関数に於てあらわれる ρ_S' の既約成分のひとつを、σ_d $(d=d_1+d_2-2\nu)$ とする。$f\in S(\sigma_d;\mathcal{O}_{\mu,A,f}^{\times})$ のとき、新たな G_A 上の関数を、

$$W_f(g)=W_{F,S,f}(g)\underset{\mathrm{def}}{=}\int_{B_{\mathbb{Q}}^{\times}\mathbb{Q}_A^{\times}\backslash B_A^{\times}}\langle f(h),F_S(\hat{h}g)\rangle_V\,dh$$

と定義。

$S(\sigma_d;\mathcal{O}^\times_{\mu,A,f})$ は $\mu_p\geq 1$ なる p について、$\mathcal{O}^\times_{\mu_p-1,p}$ の特性関数からなる基底をもち、$W_f\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\widetilde{M}_{\mu,A}\right)$ はこの空間における、Petersson 内積に他ならないから、$f*\mathcal{O}^\times_{\mu_p-1,p}=\sigma_p f$, $t\in\mathbb{Q}^\times_A$ で、$W_f\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\widetilde{M}_{\mu,A}\right)\neq 0$ としてよい。

W_f は global Whittaker function と言うべきものである。F が Hecke eigen であること、μ の極小性、及び $W_f\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\widetilde{M}_{\mu,A}\right)\neq 0$ より、W_f は G_p 上の関数として §5 (*) の条件をみたす $\mathcal{W}_{\mu_p}$ の元である。従って、Proposition 2 (i) より $\sigma_p=0$. すなわち f は、必然的に $S(\sigma_d;\mathcal{O}^\times_{\mu,A,f})^{(0)}$ に入る。

この f をもとに、Eisenstein series を定義。

$$Z^*(F,S,f;s)\underset{\mathrm{def}}{=}\int_{G'_\mathbb{Q}\mathbb{Q}^\times_A\backslash G'_A}\left\langle E^*(g,f;s-\tfrac{1}{2}),\,F(\Psi_S(g)\widetilde{M}_{\mu,A})\right\rangle_V dg$$

とおく。右辺は Proposition 1 により解析接続・関数等式がわかっている。これを変形して $\xi(F;s)$ に（定数倍を除き）一致することを示せば良い。定義より、

$$\text{右辺}=c_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\,\zeta(2s)\,\Gamma\!\left(s+\tfrac{|d_1-d_2|}{2}\right)/\,\Gamma(s)$$
$$\times\int_{G'_\mathbb{Q}\mathbb{Q}^\times_A\backslash G'_A}\sum_{\gamma\in P'_\mathbb{Q}\backslash G'_\mathbb{Q}}\left\langle L^f_\Phi(\gamma g;s+\tfrac{1}{2}),\,F(\Psi_S(g)\widetilde{M}_{\mu,A})\right\rangle_V dg.$$

Lemma 5 を使い、

$$\text{積分}=\int_{P'_\mathbb{Q}\mathbb{Q}^\times_A\backslash G'_A}\left\langle L^f_\Phi(g;s+\tfrac{1}{2}),\,F(\Psi_S(g)\widetilde{M}_{\mu,A})\right\rangle_V dg$$
$$=\int_{P'_\mathbb{Q}\mathbb{Q}^\times_A\backslash P'_A}\left\langle L^f_\Phi(p;s+\tfrac{1}{2}),\,F(\Psi_S(p)\widetilde{M}_{\mu,A})\right\rangle_V d_l p$$

を知る。F が cusp form であることより、

$$\int_{B_\mathbb{Q}\backslash B_A}F\left(\Psi_S\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}g\right)\right)dx=\sum_{m\in\mathbb{Q}^\times}F_S\left(\begin{pmatrix}m & \\ & 1\end{pmatrix}g\right)\quad。$$

$$\therefore Z^*(F,S,f;s) = C_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\frac{\Gamma(s+\frac{|d_1-d_2|}{2})\ \Gamma(s+\frac{d_1+d_2}{2}+1)}{\Gamma(s)\ \Gamma(s+\frac{d_1+d_2-2\nu}{2}+1)}$$

$$\times\int_{B_{\mathbb{Q}}^-\backslash B_A^-}\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{Q}_A^\times}\int_{B^\times\mathbb{Q}_A^\times\backslash B_A^\times}|t|_A^{s-2}\langle Z_\varphi(s+\tfrac{1}{2})f(b),\ F(\Psi_S((\begin{smallmatrix}1&x\\&1\end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix}t&\\&1\end{smallmatrix}))\widetilde{M}_{\mu,A})\rangle_V$$

$$d^\times t\,dx\,d^\times b$$

$$=(\mathrm{const})\ C_0^{\frac{1}{2}s}\pi^{-s}\zeta(2s)\Gamma(s+\tfrac{|d_1-d_2|}{2})\Gamma(s+\tfrac{d_1+d_2}{2}+1)/\Gamma(s+\tfrac{d_1+d_2-2\nu}{2}+1)$$

$$\times\int_{\mathbb{Q}_A^\times}\int_{B^\times\mathbb{Q}_A^\times\backslash B_A^\times}|t|_A^{s-2}\int_{B_A^\times}|N(\beta)|_A^{s+1}\langle\varphi(\beta)f(b\beta^{-1}),\ F_S((\begin{smallmatrix}t&\\&1\end{smallmatrix})b\widetilde{M}_{\mu,A})\rangle_V$$

$$d^\times\beta\,d^\times t\,d^\times b\ .$$

ところで、

$$\int_{B_\infty^\times}\varphi_\infty(\beta)|N(\beta)|_\infty^{s+1}f(b\beta^{-1})d^\times\beta=\pi^2\Gamma(s+1+\tfrac{d}{2})/(2\pi)^{s+1+\frac{d}{2}}\ f(b)\ ,$$

F の正則性より、

$$\int_{\mathbb{R}^\times}F_S((\begin{smallmatrix}t&\\&1\end{smallmatrix})b\widetilde{M}_{\mu,A})|t_\infty|^{s-2}d^\times t_\infty=(4\pi\sqrt{\det S})^{-(s+l_1+l_2+\frac{d_1+d_2}{2}-2)}$$

$$\times\Gamma(s+l_1+l_2+\tfrac{d_1+d_2}{2}-2)\mathbf{e}[-2i\det S]\ F_S((\begin{smallmatrix}t_f&\\&1\end{smallmatrix})b\widetilde{M}_{\mu,A})。$$

従って、

$$Z^*(F,S,f;s)=(\mathrm{const})\ C_0^{\frac{1}{2}s}\pi^{-s}\zeta(2s)\ \Gamma(s+\tfrac{|d_1-d_2|}{2})\Gamma(s+\tfrac{d_1+d_2}{2}+1)$$

$$\times\Gamma(s+l_1+l_2+\tfrac{d_1+d_2}{2}-2)\ (2\pi)^{-s}(4\pi\sqrt{\det S})^{-s}$$

$$\times\int_{B_{A,f}^\times}\int_{\mathbb{Q}_{A,f}^\times}|t|_{A,f}^{s-2}|N(\beta)|_A^{s+1}\varphi_{A,f}(\beta)\int_{B^\times\mathbb{Q}_A^\times\backslash B_A^\times}$$

$$\langle f(b\beta^{-1}),\ F_S((\begin{smallmatrix}t&\\&1\end{smallmatrix})b\widetilde{M}_{\mu,A})\rangle_V\ d^\times b\,d^\times\beta\,d^\times t\ .$$

最後の $B^\times\mathbb{Q}_A^\times\backslash B_A^\times$ 上の積分は、$W_f((\begin{smallmatrix}t&\\&1\end{smallmatrix})\beta\widetilde{M}_{\mu,A})$ となるから、Proposition 2 を用いて

$$Z^*(F,S,f;s)=(\mathrm{const})\times\xi(F;s)$$ を知る。

以上で、§1 の定理は完全に証明された。

§7. Jacobi form のL関数について

標題とは直接関係ないが、次節で Maass space に対し応用するので、簡単な Jacobi form のL関数を調べておく。ここで言う Jacobi form は、Siegel modular form の様々な partial Fourier 展開にあらわれるのと同じ変換公式をみたす保型形式を指し、*real unitary* 表現論の立場から Satake [16] で、また (*non-reductive*) 代数群上の保型形式の立場から Shintani [20] により考察されている（近年、多くの人々によって取り扱われている）。この意味での Jacobi form の一般的設定は、Murase [11] で述べられると思うが、簡単な場合に、群・保型形式・Hecke 環の定義を [20] から引用しておく。

$$G_1 = SL_2 \quad , \quad H_{1,m} = \{ (u, v, \zeta) \mid u, v \in \mathbb{Q}^m,\ \zeta = {}^t\zeta \in M_m(\mathbb{Q}) \},$$

$$\underline{\underline{G}} = G_{1,m} = H_{1,m} \rtimes G_1$$

$H_{1,m}$ の演算：$(u,v,\zeta)(u',v',\zeta') = (u+u', v+v', \zeta+\zeta'+u\,{}^tv'+v'\,{}^tu)$

G_1 の作用：$g^{-1}(u,v,\zeta)g = (u', v', \zeta')$

ここで、$(u',v') = (u,v)g$, $\zeta' = \zeta - v\,{}^tu + v'\,{}^tu'$

$$\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \ni (u,v,\zeta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{c|cc} 1_{m+1} & \zeta & v \\ & {}^tv & 0 \\ \hline & & 1_{m+1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1_m & u & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1_m & \\ & & -{}^tu & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1_m & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1_m & \\ & c & & d \end{array}\right)$$

$\in Sp(m+1, \mathbb{Q})$. $Z_m = \{ Z \mid {}^tZ = Z \in M_m(\mathbb{Q}) \}$ は、$H_{1,m}$ および $G_{1,m}$ の中心である。$\underline{\underline{U}}_p = \underline{\underline{G}}_p \cap Sp(m+1, \mathbb{Z}_p)$, $\underline{\underline{U}}_{A,f} = \prod_{p<\infty} \underline{\underline{U}}_p$ とおく。

$\underline{\underline{G}}_\infty$ は、$\mathfrak{D}_{1,m} = \{ (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ に、

$$(u,v,\zeta)g\langle (z,w) \rangle = \left(g\langle z \rangle \ , \ \frac{1}{cz+d}w + u\,g\langle z \rangle + v \right)$$

と作用している。正定値半整数対称行列 $S \in Z_m$ と自然数 l に対し、$J_{S,l}((u,v,\mathfrak{z})g,(z,w)) = (cz+d)^l \, e\left[-t_r S\mathfrak{z} + \frac{1}{cz+d}(c\,{}^t w - 2\,{}^t u)w - g\langle z\rangle\, {}^t u S u\right]$ と $\mathfrak{G}_\infty \times \mathfrak{D}_{1,m}$ 上の正則保型因子を定義する。

$$\mathfrak{S}_{S,l}(\underline{U}_{A,f}) = \{ f : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{i)} \sim \text{iii)} \}$$

- i) $f(\gamma \mathfrak{z} g u_f) = \chi(t_r S\mathfrak{z})\, f(g) \quad \forall \gamma \in \mathfrak{G}_{\mathbb{Q}},\ \forall \mathfrak{z} \in Z_{m,A}\ \ \forall u_f \in \underline{U}_{A,f}$
- ii) $f(g_\infty) J_{S,l}(g_\infty, Z_0)$ は $Z = g_\infty\langle Z_0\rangle$ のみに depend し、$\mathfrak{D}_{1,m}$ 上の正則関数
- iii) cuspidal

この空間の元を $G_{1,m}$ 上の、weight l, index S の尖点形式（Jacobi cusp form）と呼ぶ。テータ関数を介して、m の偶奇に従い整数·半整数 weight の（vector 値）cusp form とみなすこともできる。最後に（local）Hecke algebra $\mathcal{H}_{S,p}$ を、

$$\mathcal{H}_{S,p} = \{ \phi : \underline{U}_p \backslash \mathfrak{G}_p / \underline{U}_p \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi(\mathfrak{z} g) = \chi(t_r S\mathfrak{z})\phi(g),\ Z_{m,p}\backslash \operatorname{supp}\phi = \text{compact} \}$$

で定義する（積は $Z_{m,p}\backslash \mathfrak{G}_p$ 上の convolution）。

$V = \mathbb{Q}^m \supset L = \mathbb{Z}^m$ とおく。$V_p = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の lattice L' は ${}^t x S x \in \mathbb{Z}_p$ for $\forall x \in L'$ をみたす時、（S に関し）$\mathbb{Z}_p$ integral であるという。以下、S は、すべての p について $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$ が maximal $\mathbb{Z}_p$-integral であるものと仮定する。$\nu_p(S)$ を、S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index, $n_{0,p}(S) = m - 2\nu_p(S)$ とおく。また、$L' = \{ x \in V_p \mid 2Sx \in L_p,\ {}^t x S x \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$ は V_p の lattice であり、L'/L_p は $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の vector 空間であるが、この次元を $\partial_p(S)$ とおく。

<u>Lemma 7</u>

$$\mathcal{H}_{S,p} \cong \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \cdots\cdots \ \partial_p(S)=0, \\ \mathbb{C}[X]\oplus\mathbb{C} & \cdots\cdots \ \partial_p(S)=1, \\ \mathbb{C}[X]\oplus\mathbb{C}^2\oplus M_2(\mathbb{C})^{\frac{p-1}{2}} & \cdots\cdots \ \partial_p(S)=2,\ p:\text{odd}, \\ \mathbb{C}[X]\oplus M_2(\mathbb{C})^{\frac{p}{2}} & \cdots\cdots \ \partial_p(S)=2,\ p=2. \end{cases}$$

$\partial_p(S)=0$ の場合は，[20] で（より一般的設定 $G_{n,m}$ で）証明されている。他の場合についても、同様の議論をもとに証明できる。

この環は、我々の目的のためには、やや大きすぎるので少し制限しよう。$\varphi_{0,p}$，$\varphi_{1,p}\in\mathcal{H}_{S,p}$ を、

$$\begin{cases} \varphi_{0,p}(0,y,0)=p^{-\partial_p(S)} \ \text{if}\ y\in L' & \text{かつ}\ \operatorname{supp}\varphi_{0,p}=Z_{m,p}\underline{\underline{U}}_p\{(0,y,0)\mid y\in L'\}\underline{\underline{U}}_p, \\ \varphi_{1,p}\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}=1 & \text{かつ}\ \operatorname{supp}\varphi_{1,p}=Z_{m,p}\underline{\underline{U}}_p\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}\underline{\underline{U}}_p, \end{cases}$$

と定義し、この２元で生成される部分環を $\mathcal{H}'_{S,p}$ とおく。$\varphi_{0,p}$ と $\varphi_{1,p}$ は可換で、$\varphi_{0,p}=1$ (if $\partial_p(S)=0$)，$\varphi_{0,p}^2=1$ (if $\partial_p(S)=1$)，$\varphi_{0,p}^2=(p-1)/p\ \varphi_{0,p}+1/p$ (if $\partial_p(S)=2$) をみたす。$\mathcal{H}'_{S,p}$ の１次表現 λ_p に対し，

$$P_{S,p}(\lambda_p;T)=\left\{1-\left(\lambda_p(\varphi_{1,p})p^{-(1+\frac{m}{2})}-p^{-\frac{n_0(S)}{2}+\partial_p(S)}+p^{-1+\frac{n_{0p}(S)}{2}}\right)T+\lambda_p(\varphi_{0,p})^{-1}T^2\right\}$$

$$\times\begin{cases} 1-\chi_{S,p}(p)T & m=\text{even} \\ 1 & m=\text{odd} \end{cases}$$

とおく。

ここで $\chi_S=\prod_v\chi_{S,v}$ は、$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{m}{2}}\det S})$ に対応する Dirichlet 指標．S にのみ依存する多項式 $B_{S,p}(T)$ を次の様に定義。

$$B_{S,p}(T)=\begin{cases} 1 & (n_{0,p}(S),\partial_p(S))=(0,0),(1,0),(2,0),(2,1) \\ 1+T & =(1,1) \\ 1-T & =(3,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+T)(1-T) & = (3,2) \\ (1+p^{\frac{1}{2}}T)(1+p^{-\frac{1}{2}}T) & = (2,2) \\ (1-p^{\frac{1}{2}}T)(1-p^{-\frac{1}{2}}T) & = (4,2) \end{cases}$$

local L関数を、

$L_{S,p}(\lambda_p;s) = B_{S,p}(p^{\frac{1}{2}-s}) \times P_{S,p}(\lambda_p;p^{-s})^{-1}$ で定義する。

この定義は $\partial_p(S)=0$ のとき [20] で与えられているものに一致。

$\mathfrak{S}_{S,\ell}(\underline{U}_{A,f})$ の元 f が、$\mathcal{H}'_{A,f}=\otimes\mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数：

$f*\phi=\lambda_f(\phi)f \quad \text{for } \forall\phi\in\mathcal{H}'_{A,f}$ のとき，

$$L(f;s) \underset{\overline{def}}{=} \prod_{p<\infty} L_{S,p}(\lambda_f;s) ,$$

$$\xi(f;s) \underset{\overline{def}}{=} L(f;s)\times\begin{cases} 2^{-s}\pi^{-\frac{3}{2}s}(\det 2S)^{\frac{s}{2}}\Gamma(s+\ell-\frac{m+2}{2}) \\ \qquad \times\begin{cases}\Gamma(\frac{s+1}{2}) & m\equiv 0\ (4) \\ \Gamma(\frac{s}{2}) & m\equiv 2\ (4)\end{cases} & m:\text{偶} \\ (2\pi)^{-s}(2^{-1}\det 2S)^{\frac{s}{2}}\Gamma(s+\ell-\frac{m+2}{2}) & m:\text{奇} \end{cases}$$

とおくと、次の結果が成立する。

<u>Proposition 3</u>　$\ell>\frac{m+3}{2}$ とする。$\xi(f;s)$ は高々 $s=0,1$ に simple pole をもつ他は正則な関数として、全 s 平面に解析接続され、関数等式　$\xi(f;s)=\varepsilon_m\,\xi(f;1-s)$ をみたす。ここで ε_m は $m\equiv 1$ or 3 (mod. 8) のとき -1，他のときは 1.

更に $m\not\equiv 6$ (mod. 8) ならば、entire。

証明は、[20] で与えられている積分表示（を $\partial_p(S)\geq 1$ なる p も込めた形）から出発する。$G_{1,m+1}$ の Eisenstein series の性質に帰着されるが、これは全ての Fourier 係数に対し解析接続・関数等式を求めることで処理される。解析的部分は、

Shimura [18] の議論に従うが、関数等式を求めるための *local* part の計算はかなりめんどう。

例1　$m=0$．このとき $\mathfrak{S}_\ell(\underline{U}_{A,f})$ は，$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する weight ℓ の cusp form に他ならない。$\xi(f;s)$ は、f を GL_2 の保型形式とみれば、[18] で扱われている $^L(GL_2)^0 = GL_2(\mathbb{C})$ の 2 次対称テンソル表現に対応する L 関数である。（SL_2 上の保型形式とみるなら $^L(SL_2)^0 = SO(3;\mathbb{C})$ の natural representation と対応する）。

例2　$m=1$，$S=1$ とする。これは Andrianov [2] で扱われている本来の Maass space と対応する空間である。$F(f)$ で対応する 2 次 Siegel cusp form を、$\xi(F(f);s)$ でその L 関数をあらわせば、

$$\xi(F(f);s) = (\mathrm{const}) \times (s-\tfrac{1}{2})\,\zeta(s-\tfrac{1}{2})\,\zeta(s+\tfrac{1}{2})\,\xi(f;s)$$

が成立する。また、$\xi(f;\frac{3}{2}) \neq 0$ もわかる（cf. Oda [13]）。

§8.　ある部分空間

$S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})$ の部分空間 $S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})'$ を、

$$S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})' = \left\{ F \in S(\rho_{\ell,d};U_{A,f}) \;\middle|\; F_S(hg) = F_S(g) \quad \begin{matrix} \forall h \in H(S)_A \\ \forall S \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \end{matrix} \right\}$$

と定義する。この空間は、明らかに、$\mathcal{H}_{A,f}$-stable であり、$d_1 \neq d_2$ ならば潰れる（これは、$\rho_S'|B_\infty^{(1)}$ が単位表現を含まない

ことによる）。Theoremの証明より次の結果を得る。

<u>Corollary</u>　F が、$S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})'$ の Petersson 内積に関する直交補空間に入る時、$\zeta(F;s)$ は $s=-1,2$ で regular.

$S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})'$ の元については、Euler因子が次の形に退化している。

$$L(F;s)=\zeta(s)L(s,(\tfrac{d_K}{\cdot}))\;L^*(s)\qquad,$$

ここで $L^*(s)=\prod_{p<\infty}L_p^*(s)$

$$L_p^*(s)=\begin{cases}\{1-\lambda_F(C_1)p^{-2-s}+(\lambda_F(C_2)+p^3+p^2-p+1)p^{-3-2s}-\lambda_F(C_1)p^{-2-3s}\\ \quad+p^{-4s}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p})=-1,\\ \{1-(\lambda_F(C_1)-2p^2)p^{-2-s}+(\lambda_F(C_2)-2p\lambda_F(C_1)+3p^3+p^2+p+1)p^{-3-2s}\\ \quad-(\lambda_F(C_1)-2p^2)p^{-2-3s}+p^{-4s}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p})=1,\\ \{1-(\lambda_F(C_1)-(p^2-1))p^{-2-s}+(\lambda_F(C_2)-(p-1)\lambda_F(C_1)+p^3+p^2-p+1)p^{-3-2s}\\ \quad-(\lambda_F(C_1)-(p^2-1))p^{-2-3s}+p^{-4s}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p})=0.\end{cases}$$

最後に、scalar valued case $l=l_1+l_2$, $d_1=d_2=0$ を考えよう。[23]でみたように、基本的には1変数cusp formからのliftingがあった（cf. Oda [12], Kojima [8]）。この空間（Maass space）$\mathcal{M}_\ell$ は、上に述べた $S(\rho_{\ell,d};U_{A,f})'$ に含まれる。[23]で述べたJacobi formの空間は、前節で導入した $G_{1,2}$ 上の weight ℓ, index S の cusp form の空間に他ならない。ただし、$\mathcal{O}_K$ の $\mathbb{Z}$-basis を $1,\theta$ とし、$S=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\mathrm{tr}\theta\\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\theta & N(\theta)\end{pmatrix}$ とおいた。Jacobi form と Maass space との対応を $f\leftrightarrow F(f)$ と書く。[23]より L関数の関係は、

$$\xi(F(f);s) = (\mathrm{const}) \times s(s-1)\,\xi(s-1)\,\xi(s)\,\xi(s+1)\,\xi(f;s)$$

となる。Proposition 3 より $\xi(f;s)$ は entire であり、$\xi(f;2) \neq 0$ を知る。従って、$\xi(F(f);s)$ は $s=-1, 2$ で本当に simple pole をもつ。

References

[1] A.N.Andrianov : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Russian Math. Survey 29(1974), 45-116.

[2] A.N.Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture Inv. Math. 53(1979),267-280.

[3] J.Arthur : Eisenstein series and the trace formula, Proc. Symps. Pure Math. vol.33(1979),part 1,253-274.

[4] Harish-Chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups, Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.

[5] E.Hecke : Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Ann.,114 (1937), 1-28, 316-351.

[6] H.Jacquet, R.P.Langlands : Automorphic forms on GL(2), Lecture Note in Math. 114, Springer, 1970.

[7] V.L.Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR Sb. 32(1977), 449-476.

[8] H.Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree 2, Inv. Math. 69(1982),217-227.

[9] R.P.Langlands : Problems in the theory of automorphic forms, Lectures in Modern Analysis and Applications, Lecture Note in Math. 170, Springer, 1970, 18-86.

[10] R.P.Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer,1976.

[11] A.Murase : Jacobi formに附随するL関数について，本研究集会．

[12] T.Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2,n-2), Math. Ann. 231 (1977), 97-144.

[13] T.Oda : On the poles of Andrianov L-functions, Math. Ann. 256(1981), 323-340.

[14] I.I.Piatetski-Shapiro, S.Rallis : L-functions for the classical groups, Modular Forms.

[15] I.Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, Publ. Math. IHES 18(1963).

[16] I.Satake : ある群拡大とそのユニタリ表現について，数学(1969)．

[17] G.Shimura : Arithmetic of unitary groups, Ann. of Math. 79(1964), 369-409.

[18] G.Shimura : On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31(1975), 79-98.

[19] G.Shimura : The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group, Ann. of Math. 117(1978), 569-605.

[20] T.Shintani : ノート．

[21] T.Sugano : On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 31(1985), 521-568.

[22] T.Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q), to appear in Advanced Studies in Pure Math., vol.7, 331-360.

[23] T.Sugano : SU(2,2)の Maass space について，数理解析研究所講究録 546.